n 次元球の体積と表面積

Theorem. 半径 $R\ (>0)$ の n 次元球の体積を $V_n(R)$, 表面積を $A_n(R)$ とすると

$$V_n(R)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n, A_n(R)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^n$$

となる. ただし, $\Gamma(s)$ は Gamma 関数で

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

である.

Proof. $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, R>0$ とする. Gauss 積分を極座標変換を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx&=\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}A_n(1)dr\\&=\frac{1}{2}A_n(1)\int_0^\infty t^{\frac{t}{2}-1}e^{-t}dt\ (\because r=\sqrt{t})\\&=\frac{1}{2}A_n(1)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

のようになる. 一方

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx&=\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty e^{-({x_1}^2+\cdots+{x_n}^2)}dx_1\cdots dx_n\\&=\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt\right)^n\\&=\pi^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

となるから, $A_n(1)=\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ が得られる. よって, 半径の相似比を考えることにより

$$A_n(R)=A_n(1)R^n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^n$$

となる.

次に $V_n(R)$ を求める. この場合も半径の相似比を考えることにより $V_n(R)=V_n(1)R^n$ であることがわかるから, $V_n(1)$ を求める. 先ほどと同様に極座標変換を用いて計算すると

$$V_n(1)=\int_{|x|\le 1}dx=\int_0^1 A_n(1)r^{n-1}dr=\frac{A_n(1)}{n}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\ (\because\Gamma(s+1)=s\Gamma(s))$$

となるから

$$V_n(R)=V_n(1)R^n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$$

が得られる.

以上より定理が示された. ■